# Gauß und die Gedäsie

F. Dehnert (fabian.dehnert@onlinehome.de)

25. März 2012

Ohne Zweifel war Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855) einer der größten Mathematiker aller Zeiten, der aber nicht nur die Mathematik allein in verschiedenen Bereichen um einiges voran gebracht hat, sondern auch in anderen Wissenschafften wie Physik und Astronomie wichtige Pionierarbeit geleistet hat. So auch in der Landvermessung und Vermessungstechnik (Geodäsie) und der Vizeheliotrop der Physikalischen Sammlung ist stummer Zeuge dieses Schaffensbereiches Gauß. Im Folgenden soll zunächst der Lebenslauf Gauß kurz betrachtet werden um sich dann genauer auf seien Rolle in der Landvermessung zu konzentrieren. Anschließend untersuchen wir der Einfluss Gauß auf die Anfänge der Differentialgeometrie- eine Reise die uns letztendlich über Riemann zu einem Teilgebiet moderner Mathematik führt, das sich auch heute noch aktiver Forschung erfreut, neben Anwendungen in nahezu allen Teilgebieten der (vorallem theoretischen) Physik.

## Gauß - Mathematicorum Principi

C. F. Gauß

Als der König von Hannover Georg V. bereits 1856 und damit nur ein Jahr nach dem Tod von Johann Carl Friedrich Gauß am 23. Februar 1855 in Göttingen eine Gedenkmünze für Gauß mit der Widmung „Mathematicorum Principi“ (deutsch: dem Fürsten der Mathematik) prägen lässt, zeichnet sich bereits ab welch bedeutendes Erbe Gauß für die Wissenschaft hinterlassen wird. Seine breit gefächerte Interessengebiete zusammen mit seiner unbestreitbaren Genialität spiegeln sich in den zahllosen Beiträgen zu den verschiedensten Themen wieder. So erkannte er die Anwendbarkeit komplexer Zahlen und findet den ersten Beweis für den Fundamentalsatz der Algeba (jede Algebraische Gleichung hat wenigstens eine Lösung) [1] und mit der Methode der kleinsten Quadrate geht die Grundlage der mathematischen Statistik auf Gauß zurück. Viele wichtige

[1] in seiner Dissertationsschrift 1799 beim braunschweiger Mathematiker J. Fr. Pfaff an der Landesuniversität Helmstedt- siehe auch [Wo55] S. 35 .

mathematische Funktionen und Theoreme (bzw. Lemmata) in den unterscheidlichsten Gebieten sind nach ihm benannt. Aber ebenso beschäftigte sich C. F. Gauß mit der Erforschung des Erdmagnetfeldes, war Direktor der Göttinger Sternwarte und wurde mit der Landvermessung des Königreichs Hannover beauftragt. Unter dem Bild von Carl Friedrich Gauß im Deutschen Museum in München heißt es:

*„Sein Geist drang in die tiefsten Geheimnisse der Zahl, des Raumes und der Natur;er maß en Lauf der Gesterine, die Gestalt und die Kräfte der Erde; die Entwicklungen der mathematischen Wissenschaft eines kommenden Jahrhunderts trug er in sich."*

## Herkunft und Kindheit:

Johann[2] Carl Friedrich Gauß wird am 30. April 1777 als einziges[3] Kind von Behard Dietrich Gauß (1744-1808) und dessen zweiter Frau Dorothea, geb. Benze (1743-1839) geboren in Braunschweig geboren. Bereits als Kind beweißt der junge Gauß eine ungewöhnliche Leichtigkeit und Sicherheit im Kopfrechnen, so sagte Gauß über sich selbst: „Ich konnte früher Rechnen als sprechen" [4].

Von 1884 bis 1888 besucht Gauß die Catharinen-Volksschule in Braunschweig, wo er in denen ersten zwei Jahren nicht sonderlich auffällt. Mit dem Eintritt in die Rechenklasse mit neun Jahren ist jedoch folgende bekannte Anektote[5] verbunden, die schon ahnen lässt, dass von diesem Schüler noch einiges zu erwarten ist. Der Leiter der Catharinenschule Büttner gab seinen Schülern die Aufgabe alle Zahlen von 1 bis 100 aufzuaddieren. Obgleich einer der Jüngsten, war die Antwort die Gauß als erster auf seine Rechentafel schrieb zum Verblüffen seiner Klassenkammeraden, als der Lehrer am Ende der Stunde die Ergebnisse kontrollierte, richtig. Anstatt allein auf sein Können im Kopfrechnen zu vertraun, hatte Gauß die Zahlen zu Paaren mit Summe 101 gruppiert und so ein zugrundeliegendes Muster erkannt. Diese Beobachtung lässt sich verallgemeinern zu der heute bei allen Mathematikstudenten unter dem Namen *„kleiner Gauß"* bekannten Formel: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Durch die überragenden Leistungen wird Büttner auf Gauß aufmekrsam und widmet sich intensiv der Förderung des jungen Genies. Er bringt ihn mit seinem Gehilfen Johann Martin Bartels (1739-1836) zusammen und gemeinsam mit dem acht Jahre älteren Barels arbeiten sie diverse Mathematikbücher durch, deren Niveau weit ab vom normal an der Schule unterrichteten Stoff liegt. Unterstützt von Bartels und Büttner wechselt Gauß im Jahr 1788 an das Catharineum Gymnasium in Braunschweig, dessen erste Klasse er sogleich überspringt. Dort kommt Gauß in Kontakt mit Eberhard August Wilhelm Zimmermann (1743-1815), Professor für Mathematik, Physik und

[2]Gauß verwendet den Vornamen Johann ab 1794 nicht mehr.
[3]Gauß hatte einen Stiefbruder, Johann Georg Heinrich Gauß (1769-1854) - siehe [Ul05].
[4]Michling, H.: Carl Friedrich Gauß - Episoden aus dem Leben des Princeps mathematicorum,3. Aufl. , Göttingen 1997 ,S. 11.
[5]siehe [Wa56] S. 12 .

Naturgeschichte am Colegium Carolinum in Braunschweig, dem es durch gute Beziehungen zum Herzog Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig gelingt Gauß Förderung durch diesen zu vermitteln. Ab Februar 1792 bis Sommer 1795 besucht Gauß das Collegium Carolinum. Während seiner Zeit am Collegium kam Gauß mit aktueller mathematischer Literatur unter andem Isaac Newtons (1642-1727), Leonahard Eulers (1707-1783) und Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) in Verbindung und beginnt seine eigenen Ideen zu verfolgen.

*„Nil actum reputans si quid superesset agendum“ - „Nichts ist getan, wenn noch etwas zu tun übrig ist.“* [6]

## Herrscher im Reich der Zahlen

Weiterhin durch das herzögliche Stipendium unterstützt beginnt Gauß am 18. Oktober 1795 das Studium der Mathematik an der Georgia Augusta in Göttingen. Er besuchte Veranstaltungen in höherer Mathematik, Philosophie sowie klassischer Philologie und zeigte ebenfalls eine ausgeprägte Begabung für alte Sprachen. Unter anderem nahm Gauß auch an Veranstaltungen von Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799), dem Lehrstuhl für Experimentalphysik und höhere Mathematik teil. Ab 1796 beschäftigt sich Gauß in seinen Studien ausschließlich mit Mathematik und Astronomie. So gelingt ihm am 30. März 1796 der Beweis[7] der Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks mit Zirkel und Lineal[8] der in seinem Monumentalwerk zur Zahlentheorie *„Disquisitiones Arithmeticae“* (1801) erscheint.

Georgia August - Kupferstich Georg Daniel Heumann

Vermutlich das Auslaufen des Stipendiums veranlässt Gauß im September 1798 Göttingen zu verlassen und vorerst nach Braunschweig zurückzukehren. Bei der Arbeit an den Disquisitiones reißt Gauß nach Helmstedt und lernt dort den Mathematiker Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) kennen, bei dem er am 16. Juli 1799 promovierte.

Gauß erlangt Weltruhm als Mathematiker und Astronom als es Franz Xaver von Zach (1754-1832) am 7. Dezember 1801 gelingt den Zwergplaneten Ceres [9] auf, der von Gauß durch eine neue Methode zur Bahnbestimmung verhergesagten Position, zu beobachten. Kurz darauf wird Gauß Mitglied der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften [10]. Im Sommer 1807 folgt er dem Ruf als Direktor der Sternwarte und

[6] Gauß, Werke Bd. 5 (nach [Wa56] S. 43)
[7] Ein zuvor ungelöstes Problem aus der Antike
[8] siehe [Wa56] S. 16 .
[9] zum ersten Mal am 1. Januar 1801 von Guiseppe Piazzi entdeckt - dannach aus den Augen verloren.
[10] heute Akademie der Wissenschaften - in Göttingen.

Professor der Philosophie nach Göttingen, wo er bis zu seinem Tode wirken sollte. Bereits 1805 heiratet Gauß Johanna Elisabeth Rosina Osthoff (1780-1809), die bereits 1809 stirbt; dannach zweite Ehe mit Friederica Wilhelmine Waldeck (1788 -1831).

1808 veröffentlicht er sein Astronomisches Hauptwerk *„Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium“* [11] und in den folgenden Jahren einige wichtige Beiträge zur Mathematik, so 1814 eine Methode zur numerischen Integration. Im November 1816 wir Gauß zum Königlichen Hofrat ernannt und wird im Semptember 1820 Mitglied der Académie Royale des Sciences in Paris. Im selben Jahr (9. Mai) beginnt mit dem Auftrag der Triangulierung des Könnigreichs Hannover durch den König Georg IV. seine geodätische Schaffensperiode, der wir später noch besondere Aufmerksamkeit schenken wollen. Auch beschäfft sich Gauß in dieser Zeit intensiv mit Differentialgeometrie und am 8. Oktober 1827 erscheint sein Hauptwerk über Differentialgeometrie *„Disquisitiones generales circa superficies curvas“* [12]. 1833 erscheint eine grundlegende Arbeit zum Erdmagnetismus[13] und 1836 grüdet er den *Magnetischen Verein*, der mit der weiteren Erforschung des Erdmagnetfeldes betraut ist.

Von 1846 bis 1850 ist er maßgeblich an der Reorganisation der Weisen- und Wittwenkasse der Universität Göttingen beteiligt und entwickelt dabei erste Ansätze die heute in der Versicherungsmathemaik zum Einsatz kommen. Obwohl Gauß zeit seines Lebens Rufe an andere Universitäten bleibt Gauß Göttingen treu und wird 1849 Ehrenbürger der Stadt. Am 23. Februar 1855 stirbt Carl Friedrich Gauß im Alter von 77 Jahren in Göttingen.

*„ Es sind von Zeit zu Zeit in der Weltgeschichte hochbegabte, selten bevorzugte Naturen aus dem Dunkel ihrer Umgebung hervorgetreten, welche durch die schöpferische Kraft ihrer Gedankenwelt und durch die Energie ihres Wirkens einen so hervorragenden Einfluß auf die geistige Entwicklung der Völker ausgeübt haben, daß sie gleichsam als Marktsteine zwischen den verschiedenen Jahrhunderten dastehen ... Als solche bahnbrechende Geister haben wir in der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften für das Altertum Archimedes von Syracus, nach dem Schlusse des Mittelalters Newton und für unsere Tage Gauß hervorzuheben, dessen glänzende ruhmvolle Laufbahn vollendet ist, nachdem am 23. Februar dieses Jahres die kalte Hand des Todes seine einst tiefdenkende Stirn berührt hat.“* [14]

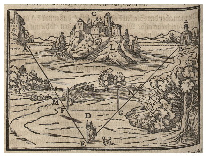
[11] deutsch: Theorie der Bewegung der Himmelskörper, die in Kegelschnitten die Sonne umlaufen.
[12] deutsch: Allgemeine Untersuchungen über gekrümmte Flächen.
[13] *„Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata“*
[14] [Wa56] S.1 .

# Von Karten und Dreiecken: Geodäsie

*Geodäsie* bezeichnet die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Eroberfläche [15] und wird heute als Ingenieurswissenschaft klassifiziert. Schon die Ägypter verwendeten mathematische Methoden zur Vermessung von Gelände unter wirtschaftlichen und verwaltungstechnischen Aspekten. Der Lauf der Geschichte und der technische und wissenschaftliche Fortschritt forderten eine immer genauere Kenntnis der Umgebung und des Geländes. Mit der aufsteigenden Rolle des Handels auch übere größere Entfernungen kommt der Kartographierung der bekannten Welt eine immer wichitgere Bedeutung zu und insondere die Seefahrt benötigt präzise Methoden der Naviagtion. Auch für die Verwaltung ist die genaue Vermessung des Grund und Bodens für Steuern und Bauvorhaben essentiell. Zur Zeit Gauß fordert mit dem rasch expandierenden Militär noch eine weiterer Nutzer der Geodäsie besondere Aufmerksamkeit. Die Verfügbarkeit von genauen topogrphischen Karten in verschiedenen Maßstäben ist von zentraler strategischer Bedeutung bei Truppenbewegungen und Planung von Versorgung und deren Sicherung.

*„Anpassung an das Geläde ist in der Schlacht von größter strategischer Bedeutung. Zu den erfolgsversprechenden Tugenden eines hervorragenden Generals gehört daher die Einschätzung der Lage des Feindes, die Berechnung der Entfernungen und des Schwierigkeitsgrades des Terrains.“* [16]

Mit Gauß' Wirken in der der Gedäsie gelingen bahnbrechende Ergebnisse mit der Deutschland im 19. Jahrhundert die Führungsrolle in der Gedäsie übernehmen sollte, die zuvor Frankreich inne hatte. [17] Ebenfalls gelingt es Gauß inspiriert von seinen geodätischen Arbeiten die Mathematik auf dem Gebiet der Differentialgeometrie entscheidend voranzubringen.



Landvermessung (1667)

Gauß Studium in jungen Jahren war vor allem durch die großzügige Förderung des Herzogs Carl Wilhelm Ferdinand möglich und Gauß war ihm dafür zutiefst Dankbar - so widmete er ihm seine Disquisitiones. Im Zeichen dieser Dankbarkeit plante Gauß die Triangulierung [18] für das Herzogtum Braunschweig in den Jahren 1802 bis 1807. Die Grundidee der Triangulierung besteht darin, dass sich über größere Distanzen Winkel einfacher und genauer messen lassen als Stecken. Trigonometrische Formeln liefern einen Zusammenhang zwischen Längen von Seiten und Winkeln. Sind eine Seite und zwei Winkel bekannt so werden die Längen der anderen Seiten berechenbar. Bei der Landvermessung ist es nun also nötig genaue Kentnnis von Grundseiten und genügend Dreieckspunkte (geodätische Festpunkte) zu haben um beliebige Entfernungen möglichste genau zu messen. Die geodätischen Festpunkte waren meistens auf erhöhtem Gelände angesiedelt wie etwa Bergkuppen oder

[15] nach Friedrich Robert Helmert (1843-1917) - deutscher Geodät und Mathematiker.
[16] Sun Zi - The Art of War, Kapitel 10.17; nach Samuel B. Griffith
[17] nach [Ke05] S.150 .
[18] von dem lateinischen Triangulum: „Dreieck“.

Türmen. Durch genauere Analyse der Winkel ist es möglich bei bekannter Position eines gewählten Fundamentalpunktes im Gradnetz, die Position jedes anderen Punktes zu bestimmen. Heute verwendet man natürlich Satellitentriangulierung.

Gauß vermisst in der Umgebung der Stadt Braunschweig im genannten Zeitraum etwa 100 Netzpunkte. Noch wichtiger ist dabei, dass er um Messfehler auszugleichen versucht die mittlere Abweichung zum „idealen Messwert“ zu minimieren, ein Verfahren das heute unter dem Namen „Methode der kleinesten Quadrate“ bekannt ist und die Grundlage zu modernen Stochasik legt. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass sich durch die quadrierten Fehler Schwankungen nicht wegheben können und größere Fehler mit größerem gewicht beachtet werden. Diese mathematische begründete Rechnungsweise erwies mit der Positionsbestimmung Ceres erneut ihre Kraft, jedoch veröffentlichte Gauß seine Ausgleichsrechnung erst viel später: 1809. Ein Jahr später veröffentlich er mit *„Disquisitio de elementis ellipticis Palladis“* [19] ein weiters Werk das sich mit Ausgleichsrechung beschäft und einen Algorithmus enthält der heute als „Gauß'scher Algorithmus“ bekannt ist. Ein wesentlicher Charakterzug Gauß war es ein Thema erst vollends zu durchdringen bevor er veröffentlichte, was dazu führte dass viele Resultate von anderen Wissenschaftlern vor Gauß publiziert wurden, diese aber Gauß schon Jahre lang bekannt waren. So veröffentlichte er nun seiner Meinung nach vollständige Theorie seiner Ausgleichsrechnung erst 1826 in *„Supplementum Theoriae Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae“* [20].

Obwohl man vor einigen hundert Jahren noch widersprochen hätte ist die Erdoberfläche nun einmal nicht flach was zu verschiedenen Problemen bei der Kartographie und Vermessung der Erdoberfläche führt. So hat ein Dreieck auf einer ellipsoid- oder kugelförmigen Oberfläche nichtmehr, die aus der Schule bekannte Winkelsumme von 180 Grad, sondern weißt einen Winkelüberschuss auf, den sogenannten Exzess. So maß Gauß bei dem durch die Netzpunkte Hoher Hagen, Brocken und Inselberg einen Exzess von 14 Sekunden. [21] Während in der Ebene die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist, ist schon der Begriff einer „Geraden“ auf einer gekrümmten Oberfläche gänzlich fehl am Platz und auch die Länge von gekrümmten Strecken ist um einiges schwieriger zu bestimmen. Man bezeichnet in der Mathematik die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf einer Fläche als *Geodäte*. So misst man der Längen und Winkelmessung auf der Erdoberfläche nicht entlang von Geraden sondern entlang von gedätischen Linien auf der Oberfläche und sollte dem auch Rechnung tragen, was auch von Gauß und seinen Zeitgenossen, die sich mit der Geodäsie beschäftigten, vorgeschlagen und getan wurde. [22] Gauß veröffentlich mehrere Werke zur Geodäsie so etwa *„Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie“* in zwei Abhandlungen, jedoch erst 1843 bzw. 1846. Seinen ersten Kontakt mit der

[19] deutsch: Untersuchung zu den elliptischen Elementen der Pallas.

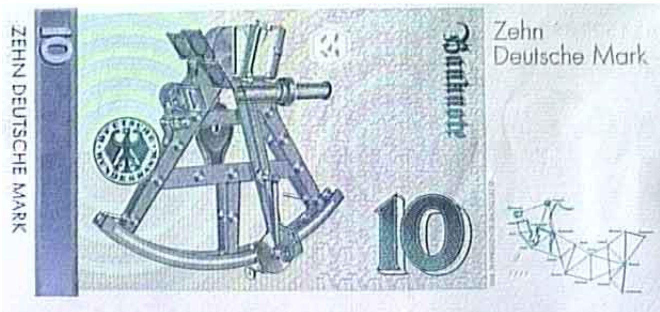
[20] deutsch: Supplement zur Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Kombination der Beobachtungen.

[21] vergleiche Charles Kittel et al., Berkeley Physik Kurs 1, Mechanik, 5., verbesserte Auflage, Braunschweig/Wiesbaden, 1991, S. 5

[22] siehe [Ke05] S.154 .

Landvermessung machte Gauß bereits 1797, als er bei der Vermessung des Herzogtums Westfalen als Berater fungiert und 1806 ist er an einer Längen- und Breitengradmessung in Dänemark beteiligt. Nach dem Wiener Kongress 1815 leitet Gauß die erneute [23] Landvermessung des Königreichs Hannover wozu er am 9. Mai 1820 von König Georg IV. den Auftrag erhält. Wie bereits erwähnt ist eine größere Schwierigkeit bei der praktischen Durchführung einer Triangulation die Sichtbarmachung der Eckpunkte, die überwunden werden muss. Bereits zwei Jahre zuvor hatte Gauß bei Winkelmessungen während einer Reise von Lüneburg nach Hamburg, die Beobachtung gemacht, dass von der Sonne in Fenstern reflektierte Strahlen seine Messungen störten [24]. Jedoch erkannte er auch wie die Sonnenstrahlen zu seinem Vorteil einzusetzen seien - eine wesentliche Beobachtung, die zu Erfindung des Gauß'schen Vizeheliotrp führen sollte.

Der Vizehelitrop besteht aus der Verbindung von einem Fernrohr und zwei Planspiegeln, die es ermöglichen das Sonnenlicht in die zu Vermessende Richtung zu lenken sodass der Vermessende mit den Helitrop [25] weithin als heller Punkt sichtbar ist. Der 1991 eingeführte 10-DM Schein hat den Gauß'schen Vizehelitrop auf der Rückseite neben einen Auschnitt aus dem Dreieckspunktsystem der Triangulation.



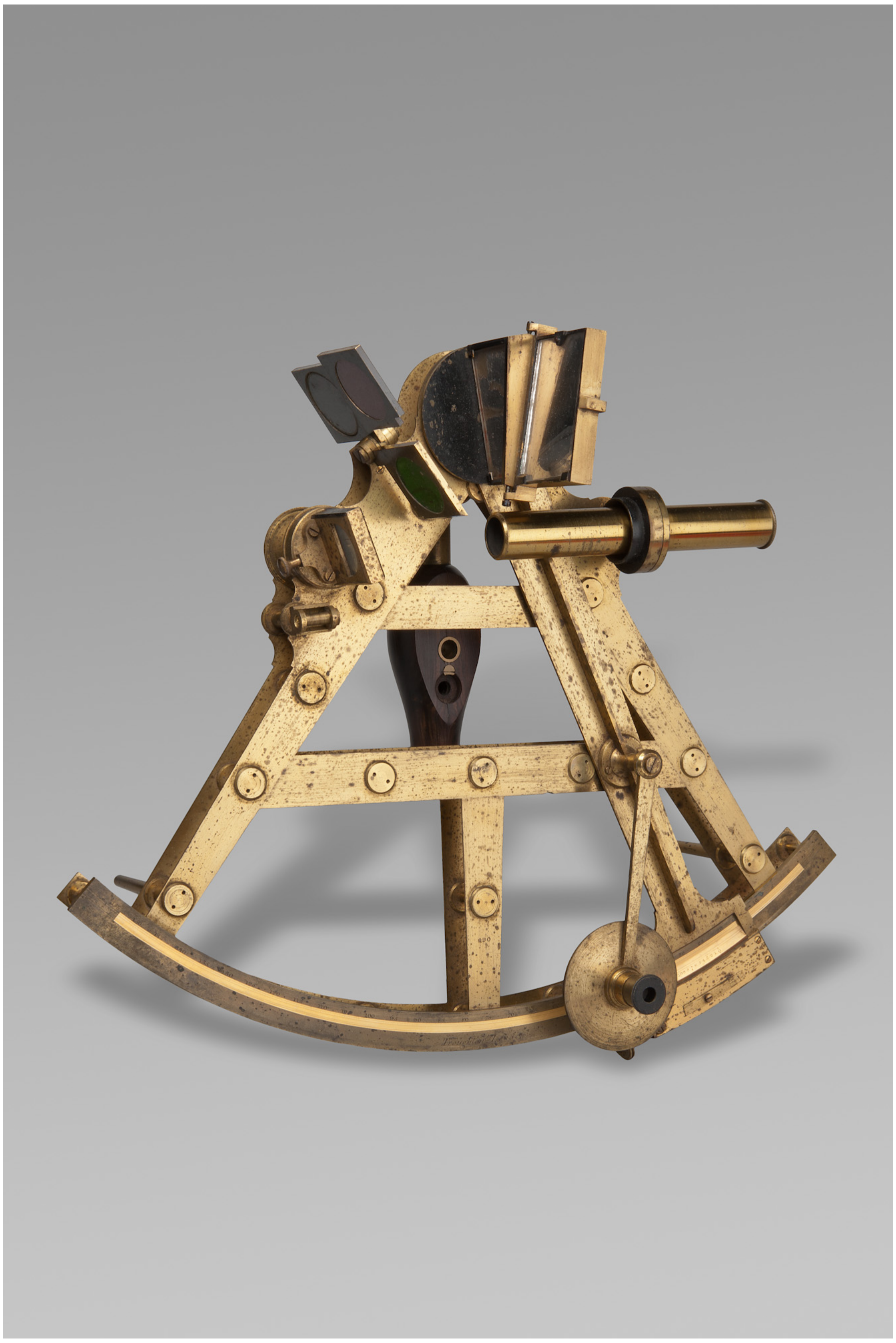

Der hier und in der folgenden Abbildung gezeigt Helitrop basiert auf einem nautischen Sextant (aus den Londoner Werkstädten von Edward Troughton (1753-1853)), der von Gauß mit Blenden und Spiegeln modifiziert wurde. In späteren Entwicklungsschritten wurden dann auch Helitropen in Göttingen unter der Aufsicht des Machanikers Johannn Philip Rumpf (1791-1833) hergestellt [26]. Der Helitrop ist Zeuge von Gauß Erfindungsreichtum und seiner Fähigkeit praktisch zu denken, welche bei großen Geistern nicht immer mit der Genialität Hand in Hand geht. Heute ist der abgebildete Helitrop Teil der Sammlung historischer physikalischer Apperate in Göttingen.

[23] Georg Christoph Lichtenberg war 1772 ebenfalls mit der Bestimmung der geographischen Position von Hannover, Osnabrück und Stade betraut.

[24] siehe Jürgen W. Koch: *Der Hamburger Spitzenmeister und Mechaniker Johann Georg Repsold (1770-1830), ein Beispiel für die Feinmachnik im norddeutschen Raum zu Beginn des 19. Jhdt., S. 56* .

[25] von griech. *Helio* = Sonne und *trop* = Wanderer .

[26] C. F. Gauß: *Werke*, Band 11, Teil 2 ,Cambridge Library Collection, 2011 S. 71 .



Der Gauß'sche Vizeheliotrop - London 1810, modifiziert 1821 von C.F. Gauß, Sammlung historischer physikalischer Apperate „Physikalisches Cabinet“, Göttingen. Foto: Stephan Eckardt.

Die ersten Praktischen Vermessungsarbeiten begannen 1821 und dauerten durch schlechte Witterung und der Notwendigkeit des Schlagens von Sichtschneißen zum Herstellen von Sichtkontatkt zwischen Dreieckspunken und Errichtung von erhöhten Postionen erschwert, bis 1825. Gauß führt die Messungen selbst aus und wertet sie auch persönlich aus. Experten schätzen das Datenvolumen auf über eine Millionen Messdaten. [27] Das Vermessene Land erstreckt sich von Inselberg (Thüringen) über Göttingen bis hin nach Altona (Hannover). Die Landvermessungskampagne war ein ungeheures Zusammenspiel von Einzelmessungen und Einzelarbeiten, die unter der Leitung Gauß zu einem Teil seines Wissenschaftlichen Erbes verschmolzen. Neben den offensichtlichen Ergebnissen seiner Vermessungsarbeit fruchtet die Beschäftigung Gauß mit der Geodäsie in eine Reihe von mathematischen Ideen mit der er sich in der Folgezeit beschäftigen sollte und die zu Bereicherung der Mathematik führten.

*„Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den grössten Genuss gewährt.“* [28]

Versucht man die bei der Triangulation erhaltenen Winkel und Strecken in Form von Karten auf Papier zu bringen ensteht dabei das vom Atlas bekannte Problem, dass die Abbildung nicht winkeltreu ist. Seit 1815 arbeitete Gauß an einem Weg seine Dreieckspunkte „konform“ [29] auf die Ebene zu projezieren. Natürlich ist Gauß erfolgreich und seine Projektionsmethode ist heute unter dem Namen *„Gauß-Krüger'sche Projektion“* [30] bekannt und die weltweit am häufigste verwendete Abbildungsmethode. Dies ist eins der vielen Beispiele wie praktische Notwendigkeit und theoretische Erkenntnis bei Gauß zusammenspielen und ihn so zu einem der vielseitigsten Gelehrten aller Zeiten machen. Die Auffassung von Gauß, dass sich Theorie und Praxis gegenseeitig befruchten sollten kommt in dem häufig zitierten Ausspruch

*„Die Wissenschaft soll die Freundin der Praxis sein, aber nicht ihre Sklavin“* [31]

zum Ausdruck. Im nächsten Abschnitt soll genauer auf das, durch die Geodäsie inspirierte, Erbe Gauß für die Differentialgeometrie eingegangen werden.

---

[27] [Ke05] S. 162 .

[28] *Schreiben Gauss an Wolfgang Bolyai*, Göttingen, 2. 9. 1808. In Franz Schmidt, Paul Stäckel (Hrsg.): Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai, B. G. Teubner, Leipzig 1899, S. 94 .

[29] dem Urbild in den kleinsten Teilen ähnlich.

[30] siehe dazu Krüger, L.: *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*, (Veröff. d. Kgl. Preuß. Geod. Inst., N.F. Nr. 52), Potsdam 1912.

[31] Gauß im Gespräch - nach M. A. Stern ([Wo55] S. 117)

# Gauß und die Differentialgeometrie

Das am 8. Oktober 1827 erscheinende *„Disquisitiones generales circa superficies curvas“* ist ohne Zweifel die wichtigste der Vielzahl von Arbeiten von Gauß zu Geometrischen Fragestellungen. Rückblickend wird es sogar als „Geburtsstunde der inneren Geometrie“ bezeichnet. [32] Man unterscheidet allgemein zwischen intrinsischen (inneren) und extrinsischen (äußeren) Eigenschaften eines geometrischen Objekts. Ein wichtiger Punkt in der Geometrie bzw. Differentialgeometrie ist die Frage ob ein Objekt z.B. eine Kurve im Raum als eigenständiges Objekt betrachtet wird oder als im Raum eingebettet. So ist der Abstand von zwei Punkten im Raum oder die Länge der Kurve eine intrinsische Größe, jedoch die Krümmung der Kurve nicht. Gauß behandelt in seinen Disquisitiones vor allem die Sitation von gekrümmten zweidimensionalen Flächen gesehen als Teil des dreidimensionalen Raums $\mathbb{E}^3$. Zwar hatte man erkannt, dass sich einige zweidimensionale Probleme auf höhere Dimensionen verallgemeinern lassen und es gab auch einige Ergebnisse zu $n$-dimensionalen Problemen, jedoch erfolgte vor 1868 mit Riemanns *„ Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“* keine systematische Untersuchung und keine Verallgemeinerung der Begriffe „Fläche“ und „Raum“ auf höhere Dimensionen [33]. Man mache sich klar, dass die klare und präzise Definition von den Objekten über die man spricht eine der Hauptaufgaben der Mathematik ist. So möchte man, wenn man über eine Oberfläche spricht normalerweise über eine hinreichend „schönes“, „glattes“ und „lochfreies“ Objekt reden und die moderene Mathematik gibt einem die nötige Sprache um solche Gebilde klar abzugrenzen.

Aber schon beim Begriff der Krümmung ist vorsicht geboten, da es verschiedene mathematisch sauber definierte Krümmungen [34] gibt. Einer der wichtigsten Krümmungsbegriffe - die „Gaußkrümmung“ $K$ wird in den Disquisitiones entwickelt und einer der bedeutensten Sätze in dem Werk, das sogenannte *Theorema egregium* [35] erkennt $K$ als Größe der inneren Geometrie. Ein anderer Satz klassifiziert $K$ als Produkt der Hauptkrümmungen $k_1$ und $k_2$ , d.h. in jedem Punkt $A$ einer Fläche $M$ in $\mathbb{E}^3$ gilt

$$K(A) = k_1 k_2,$$

wobei $k_1$ und $k_2$ die Extremwerte der Krümmungen (diesemal ist die Krümmung der Kurve gemeint) von den Kurven durch $A$ sind, die durch Schnitte von $M$ mit in $A$ orthogonalen Ebenen entstehen. Wenn man die Oberfläche einer Kugel mit Radius $r$ betrachtet so sind die Hauptkrümmungen jeweils $1/r$ und die Gaußkrümmung ist demnach in jedem Punkt $1/r^2$. Während die gerade Fläche eines Zylinders Gaußkrümmung 0 hat, denn man hat in jedem Punkt eine Gerade mit Krümmung 0. Insbesondere zeigt diese Beobachtung mathematisch, dass Kugeloberfläche und Zylinder fundamental unterschiedliche Objekte sind und es daher unmöglich ist eine

[32] [Do79] S. 99 .

[33] siehe [Re73] S. 274.

[34] für eine mathematisch einwandfreie Abhandlung sei der interessierte Leser an ein Standartwerk der klassischen Differentialgeometrie verwiesen.

[35] genauer: Wenn zwei gekrümmte Flächen in $\mathbb{E}^3$ isometrisch aufeinander abgebildet werden können, so stimmen die Gaußkrümmungen in den entsprechenden zueinander gehörenden Punkten überein.

Kugel in einen Zylinder zu verformen, jedenfalls in einem mathematisch sinnvollen Sinn. Gauß beobachtet: „Wenn eine krumme Fläche, oder ein Stück derselben auf eine andere Fläche abgewickelt werden kann, so bleibt das Krümmungsmaass in jedem Punkt ungeändert. Als specieller Fall folgt hieraus ferner: In einer krummen Fläche, die in eine Ebene abgewickelt werden kann, ist das Krümmungsmaass überall = 0. „ [36]

B. Riemann (1863)

Im nächsten Abschnitt seiner Disquisitiones erkennt Gauß den Unterschied zwischen Eigenschaften von Flächen, die von umgebenen Raum abhängen und jenen intrinsischen Eigenschaften, die Teil der Natur der Fläche selbst sind. Diese Überlegungen geben Anlass für entscheidende Entwicklungen im Bereich der Differentialgeometrie die mit der Veröffentlichung der Disquisitiones began und mit dem am 10. Juni 1854 in Göttingen gehaltenen Habilitationsvortrag von Bernhard Riemann (1826 - 1866) „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde lieben“, in denen er zum ersten mal den heute modernen Begriff der „$n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit vorschlägt, einen Höhepunkt erreicht. Dem Vortrag wohnte C. F. Gauß als einer seiner letzten Amtshandlungen an der Universität in Göttingen bei und die Mathematik in Göttingen sollte mit Riemann einen würdigen Nachfolger von Gauß finden. Gauß selbst ist von Riemanns Gedanken tief bewegt.

„Gauss hatte gegen das übliche Herkommen von den drei vorgeschlagenen Thematen nicht das erste, sondern das dritte gewählt, weil er begierig war zu hören, wie ein so schwieriger Gegenstand von einem so jungen Manne behandelt werden würdeM nun setze ih die Vorlesung welche all seine Erwartungen übertraf, in das grösste Erstaunen, und auf dem Rückwege aus der Facultäts-Sitzung sprach er sich gegen Wilhelm Weber mit höchster Anerkennung und mit einer bei ihm seltenen Erregung über die Tieder der von Riemann vorgeragenen Gedanken aus.“ [37]

Obwohl der von Riemann gehaltene Vortrag erst 1868 posthum publiziert wird und bis dahin der Fachwelt weitgehend unbekannt ist wird seine Arbeit 1869 durch Publikationen von Elwin Bruno Christoffel (1829-1900) fortgeführt die zur Entstehung der heute in allen Bereichen der moderenen Differentialgeometrie und theoretischen Physik weit verbreiteten Christoffelsymbole $\Gamma^{\lambda}_{\mu,\nu}$ führen. 1873 entsteht die Bezeichnung „Riemannscher Raum“. Die moderne Auffassung von Raum und Fläche in der Mathematik und Physik werden wir uns in einem weiteren Abschnitt noch genauer ansehen.

Zentral für die Differentialgeometrie ist der Begriff der Länge einer Kurve, was sofort zur Frage nach der kürzesten möglichen Verbindung zwischen zwei gegeben Punkten auf einer Fläche Führt, den sogenannten „Geodäten“. So sind auf der Kugel Geodäten zwischen zwei Punkten Abschnitte von Großkreisen. Die grundlegenden Eigenschaf-

[36] C. F. Gauß - nach [?] S. 88 .

[37] Vgl. B. Riemann's Lebenslauf, in Bernhard Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 1. Aufl. S. 517, 2. Aufl. S. 549 .

ten von Gedäten sind seit Johann Bernoullis [38] Zeit 1697 bekannt und der Gauß'sche Beitrag in den Disquisitiones besteht vor allem in der Untersuchung der Eigenschafften von Familien von nach Bogenlänge parametrisierten Geodäten auf Flächen in $\mathbb{E}^3$, was unter anderem die Eigenschaften der heute häufig verwendeten „Exponentialabbildung" von Tangentialvektoren und das sogenannte „*Gauß-Lemma*" mit einschließt.

Angeregt von seinen geodätischen Messungen in Zusammenhang mit den Winkelexzessen in Dreiecken beweist er den *Satz von Gauß-Bonnet*: „Der Überschuss der Summe der Winkel eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks über zwei Rechte ist der Totalkrümmung des Dreiecks gleich." [39] In modernerer Formulierung: Für ein „kleines" [40] geodätisches Dreieck $\Delta$ einer Fläche $M$ in $\mathbb{E}^3$ mit Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$ gilt:

$$\int_{\Delta} K d\sigma = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi.$$

Als interessante Bemerkung halten wir fest, dass $K = 0$ impliziert dass die Winkelsumme in geodätischen Dreiecken 180 Grad beträgt. Obwohl seine *„Disquisitiones generales circa superficies curvas"* mit 40 gedruckten Seiten im Vergleich zu seinem Zahlentheoretischen hauptwerk mit 470 Seiten eher unbedeutend erscheint, sind die darin aufgeührten Ergebnisse, Konzepte und Ideen Asudruck seiner 15 Jahre währenden Beschäftigung mit Gedäsie und den damit verbundenen Gedanken zur Differentialgeometrie. Die von Gauß angestoßene Denkweise der „inneren Geometrie" sollte sich über Riemann und vielen anderen zum heute mächtigen Instrument der Mathematik und theoretischen Physik entwickeln: der modernen Differentialgeometrie. Auch wenn die moderne Formulierung der Theorie in ihrem strikt mathematischen Stil kaum mehr an das historische Erbe erinnert, so nahm sie doch ihren Ursprung in dem hinter den, durch das Fernrohr eines Helitrops blickenden, Augen liegenden Genies Gauß, ihren Anfang.

*„Pauca sed matura"* [41]

[38] bei den „kürzseten Linien" fällt die Flächennormale mit der Hauptnormale zusammen
[39] C. F. Gauß - nach [?] S. 90 .
[40] siehe [?] S. 112 für mathematische Details.
[41] deutsch: Weniges, aber Reifes. Inschrift auf einem von Gauß verwendeten Siegel.

## Karten, Atlanten und Raumzeit.

Wie bereits vorhin erwähnt bewegt man sich angeregt von Gauß mit B. Riemann weg von der Notwendigkeit ein geometrisches Objekt („Mannigfaltigkeit") als abhängig vom umgebenden Raum anzusehen. Vielmehr führt Riemann 1854 den Begriff der $n$-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit ein, indem er eine (innere) *Metrik* definiert, d.h. eine Zuordnung die zwei beliebigen Punkten (die a priori erstmal nur Teil einer Menge von Punkten $M$ sind) einen „Abstand" [42] zuordnet, und einer Krümmungsfunktion, die unter anderem von der Gaußkrümmung abhängt, jedoch nur von Größen der inneren Geometrie. Der heute in der Differentialgeometrie allgegenwärtige Strukturbegriff ist der der *glatten Mannigfaltigkeit*. Die Grundidee bei der Definition kommt erstaunlicherweise ebenfalls aus der Landvermessung, genauer gesagt aus der Kartographie. Sogar der Irrglauben, die Erde sei flach spielt zum Teil in die Entstehung mit ein, denn ein Beobachter ist, wenn er nur einen kleinen Teil der Oberfläche sieht, zu recht dazu verleitet zu behaupten die Erde sei „lokal" Flach. Das Gesamtbild ergibt sich erst wenn man an verschiedenen stellen Beobachter mit einer lokalen Karte positioniert und feststellt, dass die Karten nicht so recht zusammen passen, da auf großem Maßstab nun die Krümmung doch etwas zu sagen hat. Demnach fordert man, da man die meisten „guten" Eigenschaften des $n$-dimensionalen Raumes mit importieren will, dass man um jeden Punkt $p$ eine Umgebung $U_p$ hat die lokal „so aussieht wie der normale Raum $\mathbb{R}^n$" und eine Abbildung von der Umgebung $U_p$ in der Mannigfaltigkeit $M$ in den $\mathbb{R}^n$, die sog. „Karte", die die genaueren lokalen Eigenschaften von $M$ definiert. Zusätzlich hätte man natürlich noch gerne, dass man wenn man auf $M$ umherläuft ein sinnvolles und zusammenpassendes System von Karten hat - den sog. „Atlas" [43]. Dieser „Wechsel" von Karten sollte möglichst „schön" möglich sein, etwa unendlich oft differenzierbar, womit man bei dem Begriff einer glatten Mannigfaltigkeit angelangt wäre.

In jedem Punkt $p$ einer glatten Mannigfaltigkeit kann man sich genau wie auf einer Kugel ein System von Tangentialvektoren denken, dem Tangentialraum $TM_p$. Ein Skalarprodukt auf diesen Tangentialräumen ermöglicht es nun sinnvoll über Längen von Kurven auf $M$ und über Winkel zu sprechen. Diese Zuordnung nennt man heutzutage „Riemannsche Metrik" und sie führt auf den modernen Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Dem modernen Ausgangspunkt für die Allgemeine Relativitätstheorie aber auch für moderne Auffassungen der klassischen Mechanik. Denn auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist es möglich von Geodäten zu sprechen und die klassische Formulierung der Mechanik durch Newton sagt nun nichts mehr aus, als dass die Bahn von Teilchen, auf die eine Kraft wirkt, Geodätische bestimmter Flächen sind.

Nachdem Albert Einstein (1879 - 1955) seine Spezielle Relativitätstheorie 1905 veröffentliche versuchte er Jahre lang die Gravitation mit in die Theorie einzubauen.

[42] Riemann definiert die Metrik über das Infimum aller Längen von stetig differenzierbaren Wegen die die beiden Punkte verbinden

[43] natürlich erhebt diese Beschreibung keinen Anspruch auf mathematische Präzision, der interessierte Lesen sei auf ein Einführungswerk in Differentialgeometrie verwiesen

Konzeptionell sollte diese „Allgemeine Relativitätstheorie“ lokal in die Spezielle übergehen und es liegt nahe, dass er sich zur Beschreibung einer nun krummen Raumzeit Konzepte der Differentialgeometrie zu nutze macht, genauer Bedurfte es der Sprache der Riemann'schen Geometrie. [44]

„Die Darstellung der physikalischen Gesetze ohne Bezug zur Geometrie entspricht der Darstellung unserer Gedanken ohne Worte. Wir benötigen Worte, wenn wir unsere Gedanken ausdrücken wollen. Wonach sollten wir aber suchen, um unser Problem darzustellen? Diese Frage war für mich bis 1912 ungelöst, als ich auf die Idee stieß, dass die Gaußsche Flächentheorie der Schlüssel zu diesem Geheimnis sein könnte. Ich erkannte, dass die Gaußschen Flächenkoordinaten eine große Bedeutung für das Verständnis dieses Problems haben. Ich fand, dass die Grundlagen der Geometrie für dieses Problem eine tiefe physikalische Bedeutung haben“ [45]

Einstein überkommt jedoch die Schwierigkeiten und veröffentlicht 1915 seine Allgemeine Relativitätstheorie. Zentraler Pfeiler dieser Theorie sind die Einstein'schen Feldgleichungen, die die Form und Art der Materie mit den geometrischen Eigenschaften der Metrik in Verbindung bringen. Während die Feldgleichungen beschreiben wie Materie den Raumkrümmt folgt für die Bewegung von etwa Planeten um ihren Fixstern, dass sie sich auf Geodäten der gekrümmten Raumzeit bewegen. Die Allgemeine Relativitätstheorie ist sicher einer der bekanntesten Vertreter aus dem Bereich der Anwendung von Differentialgeometrie.

Ausgehend von Gauß und Riemann entwickelt sich doch auch noch andere Konzept wie etwa den Begriff der Lie-Gruppe (1870/80 nach Sophus Lie - norwegischer Mathematiker) umd die in der Physik allgegenwärtige Symmetrien zu beschreiben. Sie kommen etwa in der Quantenmechanik zu häufigem Einsatz.

Die Differentialgeometrie ist auch heute noch aktives Forschungsgebiet und hat enge Verbindungen zur theoretischen Physik, deren Entwicklung häufig Hand in Hand gehen. Was einst bei Gauß und Riemann begann hat heute seinen festen Platz in der Vielfalt der mathematischen Disziplinen und kaum eine andere trägt so entscheidend zum Verständnis der Welt bei.

*„Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.“* [46]

[44] Vgl. [Ha05]
[45] nach Fölsing, Albrecht: Albert Einstein Biographie. Frankfurt/M. 1999, S. 354.
[46] Galileo Galilei

# Literatur

[Do79] Peter Dombrowski: *150 years after Gauss' „disquisitiones generales circa superficies curvas" with the original text of Gauss* , in: astérisque **62** 1979, société mathématique de france.

[Ha05] Katharina Habermann: *Von Gauß über Riemann zu Einstein - die mathematischen Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie* in: Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst. Carl Friedrich Gauß in Göttingen, hg. von E. Mittler (Göttinger Bibliotheksschriften, 30), Göttingen 2005, S. 118-130

[Ke05] Dieter Kertscher: *Carl Friedrich Gauß und die Geodäsie*, in: Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst. Carl Friedrich Gauß in Göttingen, hg. von E. Mittler (Göttinger Bibliotheksschriften, 30), Göttingen 2005, S. 150-168

[Re73] Karin Reich: *Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauß bis Riemann (1828-1868)*, Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg , 1973.

[Ul05] Peter Ullrich: *Gauss als Mensch - Herkunft und frühe Begabung*, in: Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst. Carl Friedrich Gauß in Göttingen, hg. von E. Mittler (Göttinger Bibliotheksschriften, 30), Göttingen 2005, S. 17-52

[Wa56] Sartorius von Waltershausen: *Gauss zum Gedächtniss*, 1856.

[Wo55] Erich Worbs: *Carl Friedrich Gauss: ein Lebensbild*, Koehler&Amelang, Leipzig 1955.